ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 3 Μαΐου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 89 σχολικού βιβλίου.

Α2. **α)** Λάθος.
β) Σωστό.
γ) Σωστό.
δ) Λάθος.
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος έχουμε ότι $Β\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Γ$ συνεπώς $Β\hat{Α}Δ = 40°$ και τότε $Β\hat{Α}Γ = Β\hat{Α}Δ + Δ\hat{Α}Γ = 40° + 40° = 80°$.

Στο τρίγωνο $ΒΑΔ$ έχουμε:
$$Δ\hat{Β}Α + Β\hat{Α}Δ + Α\hat{Δ}Β = 180° \Leftrightarrow Δ\hat{Β}Α + 40° + 80° = 180°$$
$$\Leftrightarrow Δ\hat{Β}Α = 180° - 40° - 80° \Leftrightarrow Δ\hat{Β}Α = 60°.$$

Στο τρίγωνο $ΑΔΓ$ η γωνία $Α\hat{Δ}Β$ είναι εξωτερική συνεπώς
$$Α\hat{Δ}Β = Δ\hat{Α}Γ + Α\hat{Γ}Δ \Leftrightarrow 80° = 40° + Α\hat{Γ}Δ \Leftrightarrow Α\hat{Γ}Δ = 80° - 40° \Leftrightarrow Α\hat{Γ}Δ = 40°.$$

Εναλλακτικά β τρόπος για τον υπολογισμό της $\hat{Γ}$:

Για την γωνία $Α\hat{Γ}Δ$ έχουμε ότι στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:
$$Β\hat{Α}Γ + Γ\hat{Β}Α + Α\hat{Γ}Β = 180° \Leftrightarrow 80° + 60° + Α\hat{Γ}Β = 180°$$
$$\Leftrightarrow Α\hat{Γ}Β = 180° - 80° - 60° \Leftrightarrow Α\hat{Γ}Β = 40°.$$

Εναλλακτικά γ τρόπος για τον υπολογισμό της $\hat{\Gamma}$:

Οι γωνίες $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$, $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές, άρα θα ισχύει:

$\mathrm{A\hat{\Delta}B} + \mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} = 180^0 \Leftrightarrow \mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} = 180^0 - \mathrm{A\hat{\Delta}B} \Leftrightarrow \mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} = 180^0 - 80^0 = 100^0$.

Οπότε στο τρίγωνο $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ έχουμε: $\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta} + \mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma} + \mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} = 180^0 \Leftrightarrow$
$\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta} + 40^0 + 100^0 = 180^0 \Leftrightarrow \mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta} = 180^0 - 140^0 = 40^0$.

Άρα στο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ισχύει: $\hat{A} = 80°$, $\hat{B} = 60°$ και $\hat{\Gamma} = 40°$.

Ομοίως και στο τρίγωνο $\mathrm{A'B'\Gamma'}$ έχουμε ίσες τις αντίστοιχες γωνίες με το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$.

Β2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Delta}$ και $\mathrm{A'B'\Delta'}$

- $\mathrm{B\hat{A}\Delta} = \mathrm{B'\hat{A}'\Delta'} = 40°$.
- $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A'\Delta'}$ (υπόθεση).
- $\mathrm{A\hat{\Delta}B} = \mathrm{A'\hat{\Delta}'B'} = 80°$.

Από το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ και $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A'\Delta'}$.

Β3. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Gamma}$ και $\mathrm{A'B'\Gamma'}$

- $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} = \mathrm{A'\hat{B}'\Gamma'} = 60°$.
- $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ (από το Β2. ερώτημα).
- $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \mathrm{B'\hat{A}'\Gamma'} = 80°$.

Από το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Εναλλακτικά β τρόπος:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ και $\mathrm{A'\Delta'\Gamma'}$

- $\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma} = \mathrm{\Delta'\hat{A}'\Gamma'} = 40°$ (υπόθεση).
- $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A'\Delta'}$ (από το Β2. ερώτημα).
- $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} = \mathrm{A'\hat{\Delta}'\Gamma'} = 100°$ (παραπληρωματικές ίσων γωνιών).

Από το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A'\Gamma'}$ (1).

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$

- $A\Gamma = A'\Gamma'$ (από σχέση (1)).
- $AB = A'B'$ (από το Β2. ερώτημα).
- $B\hat{A}\Gamma = B'\hat{A}'\Gamma' = 80°$.

Από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $AE\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$

- $A\hat{E}\Gamma = \Delta\hat{E}\Gamma = 90°$.
- $AE = E\Delta$ (υπόθεση).
- $E\Gamma$ (κοινή πλευρά).

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $A\Gamma = \Gamma\Delta$.

Εναλλακτικά β τρόπος:

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ η ΓE είναι ύψος και διάμεσος συνεπώς είναι ισοσκελές, οπότε $A\Gamma = \Gamma\Delta$.

Γ2. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Gamma$ η EM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, συνεπώς $EM = \frac{A\Gamma}{2}$.

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ η EN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, συνεπώς $EN = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Όμως αποδείξαμε ότι $A\Gamma = \Gamma\Delta$ άρα $EM = EN$ (ως μισά ίσων τμημάτων), συνεπώς το τρίγωνο MNE είναι ισοσκελές.

Εναλλακτικά β τρόπος:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AME και ΔNE

- $AM = \Delta N$ (ως μισά ίσων τμημάτων).
- $M\hat{A}E = N\hat{\Delta}E$ (ως γωνίες στην βάση του ισοσκελούς τριγώνου $A\Gamma\Delta$).
- $AE = \Delta E$ (υπόθεση).

Από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $EM = EN$, συνεπώς το τρίγωνο MNE είναι ισοσκελές.

Γ3. Στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{lll} M & \textit{μέσο} & A\Gamma \\ N & \textit{μέσο} & \Gamma\Delta \end{array}\right\} \Leftrightarrow MN // A\Delta \Leftrightarrow MN // AE \text{ και } MN = \frac{A\Delta}{2} \Leftrightarrow MN = AE$$

Άρα το τετράπλευρο $MNEA$ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.

Γ4. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Gamma$ έχουμε ότι η $A\hat{\Gamma}E = 30°$ οπότε

$$AE = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow AE = AM.$$

Επίσης αποδείξαμε ότι $AE = MN$, άρα ισχύει $AM = MN$.

Όμως το τετράπλευρο $MNEA$ είναι παραλληλόγραμμο συνεπώς $AM = EN$.

Άρα ισχύει $MN = EN$.

Όμως το τρίγωνο MNE είναι ισοσκελές, συνεπώς $EN = EM$.

Τελικά ισχύει $MN = EN = EM$, δηλαδή το τρίγωνο MNE είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ η AH είναι ύψος και διχοτόμος συνεπώς είναι ισοσκελές, οπότε η AH είναι και διάμεσος άρα $BH = H\Delta$.

Εναλλακτικά β τρόπος:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABH και $AH\Delta$

- $A\hat{H}B = A\hat{H}\Delta = 90°$.
- $B\hat{A}H = H\hat{A}\Delta$ (AH διχοτόμος).
- AH (κοινή πλευρά).

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση) τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $BH = H\Delta$.

Επίσης από την υπόθεση έχουμε ότι $AH = HZ$ άρα στο τετράπλευρο $ABZ\Delta$

οι διαγώνιοί του διχοτομούνται συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον έχουμε ότι $ΑΖ \perp ΒΔ$, δηλαδή οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, συνεπώς το τετράπλευρο $ΑΒΖΔ$ είναι ρόμβος.

Δ2. Επειδή το τετράπλευρο $ΑΒΖΔ$ είναι ρόμβος έχουμε ότι $Α\hat{Δ}Ζ = Α\hat{Β}Ζ$.

Επίσης ισχύει $Α\hat{Β}Ζ = Α\hat{Β}Γ + Γ\hat{Β}Ζ \ (1)$.

Όμως $Γ\hat{Β}Ζ = Α\hat{Γ}Β$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΑΓ$ και $ΒΖ$ που τέμνονται από την $ΒΓ$.

Συνεπώς η σχέση (1) γίνεται $Α\hat{Β}Ζ = Α\hat{Β}Γ + Α\hat{Γ}Β$.

Δ3. Στο τρίγωνο $ΒΔΓ$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} Η \quad \textit{μέσο} \quad ΒΔ \\ Θ \quad \textit{μέσο} \quad ΒΓ \end{array}\right\} \Leftrightarrow ΗΘ // ΔΓ \text{, όμως } ΔΓ // ΒΖ \text{ διότι το } ΑΒΖΔ \text{ είναι ρόμβος.}$$

Συνεπώς $ΗΘ // ΒΖ$ άρα το τετράπλευρο $ΗΒΖΘ$ είναι τραπέζιο.

Δ4. Έστω $ΚΛ$ η διάμεσος του τραπεζίου $ΗΒΖΘ$ τότε ισχύει: $ΚΛ = \dfrac{ΒΖ + ΗΘ}{2}$.

Το τετράπλευρο $ΑΒΖΔ$ είναι ρόμβος συνεπώς $ΒΖ = ΑΔ$.

Επίσης στο τρίγωνο $ΒΔΓ$ έχουμε ότι $ΗΘ = \dfrac{ΔΓ}{2}$ συνεπώς ισχύει:

$$ΚΛ = \frac{ΒΖ + ΗΘ}{2} = \frac{ΑΔ + \frac{ΔΓ}{2}}{2} = \frac{\frac{2ΑΔ + ΔΓ}{2}}{2} = \frac{2ΑΔ + ΔΓ}{4} = \frac{ΑΔ + ΑΔ + ΔΓ}{4} \overset{ΑΔ=ΑΒ}{\Leftrightarrow}$$

$$ΚΛ = \frac{ΑΒ + ΑΔ + ΔΓ}{4} = \frac{ΑΒ + ΑΓ}{4}.$$